Polinomi di più variabili

I polinomi di una e più variabili

Definizione 1. *Un polinomio P di una variabile x a coefficienti reali (si scrive $P \in \mathbb{R}[x]$) è una funzione della forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

dove a_k sono coefficienti reali. Se $a_n \neq 0$, deiciamo che P ha grado n.

Teorema 2. *Se il polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ è tale che*

$$P(x) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R},$$

allora tutti i coefficienti di P sono nulli.

Dimostrazione: Supporre per assurdo che P sia della forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n \qquad \text{con} \qquad a_n \neq 0.$$

Concludere considerando il limite $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{x^n}$.

Definizione 3. *Un polinomio P di due variabili x, y a coefficienti reali (si scrive $P \in \mathbb{R}[x, y]$) è una funzione della forma*

$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

dove la somma è finita e dove a_{ij} sono coefficienti reali. Il grado del polinomio è

$$\deg P = \max\{i + j \ : \ a_{ij} \neq 0\}.$$

Teorema 4. *Se il polinomio $P \in \mathbb{R}[x, y]$ è tale che*

$$P(x, y) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

allora tutti i coefficienti di P sono nulli.

Dimostrazione: Scriviamo P nella forma

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} y^k P_k(x).$$

Osserviamo che $P_0(x) = P(x, 0)$. Quindi tutti i coefficienti del polinomio di una variabile P_0 sono nulli. Di conseguenza

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{n} y^k P_k(x) = y \sum_{k=1}^{n} y^{k-1} P_k(x) = y \sum_{j=0}^{n-1} y^j P_{j+1}(x).$$

Osservare che

$$\sum_{j=0}^{n-1} y^j P_{j+1}(x) = 0 \qquad \text{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Procedere per induzione oppure ragionare per assurdo.

Principio di identità dei polinomi di una variabile

Teorema 5 (Principio di identità tra polinomi di una variabile)**.** *Supponiamo che $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia un polinomio di una variabile e di grado $\deg P \leq n$.*
Se $P(a_i) = 0$ per $n+1$ diversi numeri reali $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$, allora $P \equiv 0$.

Dimostrazione: Dimostreremo per induzione l'affermazione seguente:

$$\mathcal{A}(n): \quad \text{Se } \deg P \leq n \text{ e } P \text{ si annulla in } n+1 \text{ punti diversi, allora } P \equiv 0.$$

Supponiamo prima che $n = 0$. Se $\deg P \leq 0$, allora P è una costante. Siccome P si annulla almeno in un punto, abbiamo che $P \equiv 0$. Supponiamo ora che $\mathcal{A}(n)$ sia vera per un qualche $n \in \mathbb{N}$. Dimostreremo $\mathcal{A}(n+1)$. Supponiamo che $\deg P \leq n+1$ e che si annulla in $n+2$ punti diversi $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < a_{n+2}$. Consideriamo la derivata P' di P. Osserviamo che P' è ancora un polinomio e che il suo grado non supera n. Inoltre, per il teorema di Rolle, in ogni intervallo (a_i, a_{i+1}) esiste un punto b_i tale che $P'(b_i) = 0$. Ora, per l'ipotesi induttiva, $P' \equiv 0$. Il polinomio P è quindi una costante. Siccome P ha almeno uno zero, otteniamo che $P \equiv 0$. $\square$

Polinomi omogenei

Definizione 6. *Sia α un numero reale. Diciamo che la funzione $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è α-omogenea se*

$$F(tx) = t^\alpha F(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \textit{ed ogni} \quad t > 0.$$

Proposizione 7. *In dimensione uno, gli unici polinomi omogenei sono quelli della forma*

$$P(x) = c_k x^k,$$

per una qualche costante reale c_k.

Dimostrazione. Infatti, se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

è un polinomio α-omogeneo per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$P(x) = P(1) x^\alpha.$$

Se $P(1) = 0$, allora il polinomio è quello nullo. Supponiamo quindi che $P(1) \neq 0$. Allora esiste ed è finito il limite

$$0 \neq P(1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{x^\alpha}.$$

Di conseguenza, $\alpha = n$. Si ha quindi

$$P(x) = P(1) x^n,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 8. *Tutti i polinomi della forma* $P_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{n-j}$ *sono n-omogenei.*

Osservazione 9. *Ogni polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ di grado n puo essere scritto come*

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y),$$

dove i polinomi P_k sono polinomi k-omogenei della forma

$$P_k(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}\, x^j y^{k-j}.$$

Teorema 10. *Sia $P \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio di grado n. Se P è α-omogeneo (per un qualche α reale), allora necessariamente $\alpha = n$ e P si può scrivere come*

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{n-j}.$$

Dimostrazione:

1. Scriviamo P come somma di polinomi omogenei: $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y)$.

2. Prendiamo un punto (x,y) tale che $P_n(x,y) \neq 0$. Consideriamo il limite

$$P_n(x,y) = \lim_{t\to+\infty} \frac{P(tx,ty)}{t^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha P(x,y)}{t^n}.$$

   Siccome

$$0 < |P_n(x,y)| < +\infty,$$

   abbiamo che necessariamente $\alpha = n$.

3. Rimane da dimostrare che $P_{n-1} = \cdots = P_0 \equiv 0$. Fissiamo un punto (x,y). Siccome P è n-omogeneo, per ogni $t > 0$, abbiamo

$$0 = t^n P(x,y) - P(tx,ty) = t^n \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y) - \sum_{k=0}^{n} t^k P_k(x,y) = t^n \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,y) - \sum_{k=0}^{n-1} t^k P_k(x,y).$$

   Per il principio d'identità tra polinomi (di una variabile che in questo caso è t), si ha che

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,y) = P_{n-1}(x,y) = P_{n-2}(x,y) = \cdots = P_1(x,y) = P_0(x,y) = 0.$$

   Siccome il punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è arbitrario abbiamo la tesi. □

Teorema 11. *Ogni polinomio $P \in \mathbb{R}[x,y]$ si scrive in modo unico come somma di polinomi omogenei.*

Dimostrazione: Supponiamo che

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y) \qquad \text{e} \qquad P(x,y) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(x,y).$$

Osserviamo prima che $m = n$. Infatti, se $n > m$, allora prendendo un punto (x,y) tale che $P_n(x,y) \neq 0$, otteniamo che

$$P_n(x,y) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(tx,ty)}{t^n} = \lim_{t\to+\infty} \frac{P(tx,ty)}{t^n} = \lim_{t\to+\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{P_j(tx,ty)}{t^n} = 0,$$

il che è una contraddizione.

Fissiamo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora, per ogni $t \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} t^k P_k(x,y) = P(tx,ty) = \sum_{j=0}^{n} t^j Q_j(x,y).$$

Per il principio d'identità tra polinomi di una variabile abbiamo che

$$m = n$$

e $P_k(x,y) = Q_k(x,y)$ per ogni $k = 0, \ldots, n$. □